ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫ СО ВТОРЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ, НЕ БОЛЬШИМ t

А.А. Махнев[1],

[1]Институт математики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
makhnev@imm.uran.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется регулярным степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем реберно регулярным с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется сильно регулярным графом, если он имеет диаметр 2. Графом в половинном случае называется сильно регулярный граф с параметрами $(4\mu + 1, 2\mu, \mu - 1, \mu)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется α-частичной геометрией порядка (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t, для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, ...$.

В настоящее время задача Кулена полностью решена для $t = 3$. Близится к завершению перечисление массивов пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением t для $3 < t \le 4$ [1-2].

В данной статье начата разработка программы изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t, $4 < t \le 5$.

Сильно регулярный граф Γ с неглавным собственным значением $m-1$ назовем исключительным, если он не принадлежит следующему списку:

(1) объединение изолированных m-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t+m-1,t)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s,m-1)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $(-1+\sqrt{4\mu+1})/2 = m-1$.

А. Ноймайер [3] показал, что сильно регулярный граф Γ с неглавным собственным значением $m-1$ принадлежит либо вышеуказанному списку, либо конечному множеству исключительных графов.

Теорема. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением* t, $4 < t \le 5$, *и — вершина графа* Γ *. Тогда* $[u]$ *— исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 5, *или верно одно из утверждений:*

(1) $[u]$ *— объединение изолированных* 6*-клик;*

(2) $[u]$ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-5}(s,s-5)$ *и либо*

(i) Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(176,49,12,14)$, $(209,100,45,50)$, $(806,625,480,500)$, $(1464,1225,1020,1050)$, *и* $s = 6, 9, 24, 34$ *соответственно, либо*

(ii) $s = 6$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(14,7)$, *его стандартное частное или граф с массивом пересечений* $\{49,36,1;1,12,49\}$, *либо*

(iii) $s = 7$ *и* Γ*имеет массив пересечений* $\{64,42,1;1,21,64\}$, *либо*

(iv) $s = 10$ *и* Γ *— граф Тэйлора;*

(3) $[u]$ *— дополнение псевдогеометрического графа для* $pG_6(s,5)$, Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(259,42,5,7)$, $(356,85,30,17)$, *и* $s = 8, 6$ *соответственно или* $s = 12$ *и* Γ *— граф Тэйлора;*

(4) $[u]$ *— граф в половинном случае с параметрами* $(4l+1, 2l, l-1, l)$, $l \in \{21,22,24,25,27,28,29,30\}$ *и* Γ *— граф Тэйлора.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 15-11-10025).

Литература

1. Махнев А. А. *Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения* // Известия Гомельского госуниверситета. 2014. Т. 84. № 3. С. 84–85.

2. Махнев А. А., Падучих Д. В. *Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения* // Межд. конференция "Мальцевские чтения". Тез. докл. Новосибирск. 2014. С. 69.

3. Neumaier A. *Strongly regular graphs with smallest eigenvalue* $-m$ // Arch. Math. 1979. V. 33. С. 392–400.